Abitur Mathematik Grundkurs 1999/2000 1. Analysis–Exponentialfunktionen LÖSUNGEN (Kurzform)

$f(x) = (x+1)\cdot e^{-x}$

a)	Ableitungen	$f'(x) = -x\cdot e^{-x}$
		$f''(x) = (x-1)\cdot e^{-x}$
		$f'''(x) = (2-x)\cdot e^{-x}$
	Schnittpunkt x–Achse	$f(x) = 0 = (x+1)\cdot e^{-x}$
		$x_0 = -1$ ist einzige NST, da $e^{-x} \neq 0$ für alle x
		$S_x(-1 \quad ; \quad 0)$
	Schnittpunkt y–Achse	$f(0) = 1$
		$S_y(0 \quad ; \quad 1)$
	Extrema	$f'(x) = 0 = -x\cdot e^{-x}$
		$x_E = 0$ (s.o.)
		$f''(0) = -1 < 0$ Hochpunkt
		$H(0 \quad ; \quad 1) = S_y$
	Wendepunkte	$f''(x) = 0 = (x-1)\cdot e^{-x}$
		$x_W = 1$ (s.o.)
		$f'''(1) = e^{-1} \neq 0$ Wendepunkt
		$W(1 \quad ; \quad 2\cdot e^{-1})$
b)	Schaubild K	siehe unten
c)	Schaubild C	siehe unten $h(x) = -x\cdot e^{-x} = f'(x)$
d)	Schnittstelle K und C	$f(x) = h(x)$
		$-x\cdot e^{-x} = (x+1)\cdot e^{-x}$
		$0 = (2x-1)\cdot e^{-x}$
		$x_S = -0{,}5$ (s.o.)
		Funktionswert an dieser Stelle nicht erforderlich, sonst: $S\left(-\frac{1}{2} \quad ; \quad \frac{1}{2}\sqrt{e}\right)$
	Überprüfung rechtwinklig	$m_f = f'(-0{,}5) = 0{,}5\sqrt{e}$
		$m_h = h'(-0{,}5) = f''(-0{,}5) = -1{,}5\sqrt{e}$
		rechtwinklig, wenn $m_f \cdot m_h = -1$
		$0{,}5\sqrt{e}\cdot(-1{,}5)\sqrt{e} = -0{,}75\cdot e \approx -2{,}04 \neq -1$
		—> Die Kurven schneiden sich nicht rechtwinklig.
e)	$F(x) = (-x-2)\cdot e^{-x}$	$F'(x) = -e^{-x} + (-x-2)\cdot e^{-x}\cdot(-1) = e^{-x}\cdot(x+1) = f(x)$
		—> F ist eine Stammfunktion von f .
	$f(x) = (x+1)\cdot e^{-x}$	$f'(x) = h(x)$ bereits gezeigt.
		—> f ist eine Stammfunktion von h .

	Flächeninhalt	$A(t)=\int_0^t \left(f(x)-h(x)\right)dx=\left[(-x-2)\cdot e^{-x}-(x+1)\cdot e^{-x}\right]_0^t$
		$A(t)=\left[e^{-x}\cdot(-2x-3)\right]_0^t=\left(e^{-t}\cdot(-2\cdot t-3)\right)-(-3)$
		$A(t)=3-\frac{2\cdot t+3}{e^t}$
	Grenzwert A(t)	$\lim\limits_{t\to\infty} A(t)=\lim\limits_{t\to\infty} 3-\lim\limits_{t\to\infty}\frac{2\cdot t+3}{e^t}=3-0=3$
		—> Der Flächeninhalt kann nicht größer als 3 werden .

Schaubilder: f(x) blau , h(x) rot