Abitur Mathematik Grundkurs 1999/2000 2. Analysis–Gebrochenrationale Funktionen LÖSUNGEN (Kurzform)

$$f(x)=\frac{18-2x^2}{x^2-4}$$

a)	Schnittpunkte x–Achse	$f(x)=0$
		$0=18-2x^2$
		$x_{01}=3$
		$x_{02}=-3$ (Nennerpolynom ist für beide Werte nicht Null.)
		$N_1(3\ ;\ 0)$, $N_2(-3\ ;\ 0)$
	Schnittpunkt y–Achse	$f(0)=-4{,}5$
		$S_y(0\ ;\ -4{,}5)$
	Pole	$0=x^2-4$
		$x_{P1}=2$ Pol mit Vorzeichenwechsel
		$x_{P2}=-2$ Pol mit Vorzeichenwechsel
	waagerechte Asymptote	$A(x)=-2$
		(Grad Zählerpolynom = Grad Nennerpolynom —> Asymptote ist Quotient der beiden Koeffizienten der höchsten Potenz)
	Symmetrie	$f(-x)=\frac{18-2\cdot(-x)^2}{(-x)^2-4}=\frac{18-2\cdot x^2}{x^2-4}=f(x)$
		—> Der Graph G ist achsensymmetrisch.
b)	1. Ableitung	$f'(x)=\frac{-4x\cdot(x^2-4)-(18-2x^2)\cdot 2x}{(x^2-4)^2}=\frac{-20x}{(x^2-4)^2}$
	Extrema	$f'(x)=0$
		$0=-20x$
		$x_E=0$ Nennerpolynom ist ungleich Null.
	$f''(x)=20\cdot\frac{4+3x^2}{(x^2-4)^2}$	$f''(0)=-1{,}25<0$ Hochpunkt
		$H(0\ ;\ -4{,}5)=S_y$
	Wendepunkt	Aus $0=4+3x^2$
		folgt $x^2=-1{,}33$, diese hat keine reellen Lösungen .
		—> G hat keine Wendepunkte.
c)	Graph	siehe unten
d)	$F(x)=-2x+\frac{5}{2}\ln\left(\frac{x-2}{x+2}\right)$	$F'(x)=-2+\frac{5}{2}\cdot\frac{x+2}{x-2}\cdot\frac{(x+2)-(x-2)}{(x+2)^2}=-2+\frac{5}{2}\cdot\frac{4}{(x-2)\cdot(x+2)}$
		$F'(x)=\frac{-2(x^2-4)+10}{x^2-4}=\frac{-2x^2+18}{x^2-4}=f(x)$
		—> F ist eine Stammfunktion von f.
e)	Flächeninhalt	$A=\left\lvert\int_3^6 f(x)dx\right\rvert=\left\lvert\left[-2x+\frac{5}{2}\ln\left(\frac{x-2}{x+2}\right)\right]_3^6\right\rvert$

		$A=\left\|\left(-12+2{,}5\cdot\ln(0{,}5)\right)-\left(-6+2{,}5\cdot\ln(0{,}2)\right)\right\|=3{,}71FE$
f)	Tangenten an N_1 und N_2	$m_1 = f'(3) = -2{,}4$
		mit N_1 ist damit $0=-2{,}4\cdot 3+n_1$, also $n_1 = 7{,}2$
		Tangente t_1 an N_1 : $y=-2{,}4x+7{,}2$
		$m_2 = f'(-3) = 2{,}4$
		mit N_2 ist damit $0=2{,}4\cdot(-3)+n_2$, also $n_2 = 7{,}2$
		Tangente t_2 an N_2 : $y=2{,}4x+7{,}2$
g)	Flächeninhalt Dreieck	Schnittstelle von t_1 mit $y = -2$: $-2=2{,}4x+7{,}2$ ist $x = 3{,}833$
		Höhe des / der Dreiecke ist $2 + 7{,}2 = 9{,}2$
		aus Symmetriegründen ist $A_\Delta = 2\cdot 0{,}5\cdot 3{,}833\cdot 9{,}2$ = 35,267 FE

Graphische Darstellung der Ergebnisse :