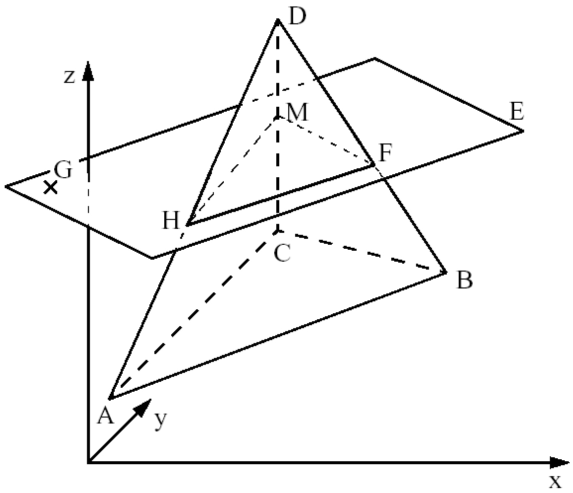
3. Analytische Geometrie (20 Punkte)

Die Punkte A (3 ; 1 ; 1), B (9 ; 7 ; 1), C (3 ; 7 ; 1) und D (3 ; 7 ; 7) sind Eckpunkte einer dreiseitigen Pyramide (siehe Skizze):



(Skizze nicht maßstäblich)

a) Weisen Sie nach, dass die Seitenkanten $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ und $\overline{DC}$ gleich lang und paarweise orthogonal zueinander sind.
Berechnen Sie das Volumen der Pyramide.

b) Bestimmen Sie den Mittelpunkt M der Seitenkante $\overline{DC}$.
Zeigen Sie, dass der Punkt F (7 ; 7 ; 3) auf der Seitenkante $\overline{BD}$ liegt.

c) Geben Sie eine Normalengleichung der Ebene E an, die durch die Punkte F, M und G (–1 ; 3 ; 4) verläuft.

d) Die Seitenkante $\overline{AD}$ wird von der Ebene E im Punkt H geschnitten.
Berechnen Sie die Koordinaten von H.

e) Berechnen Sie den Flächeninhalt der Schnittfigur Δ HFM.

f) Berechnen Sie den Schnittwinkel zwischen der Ebene E und der Ebene E_1, die durch die Grundfläche der Pyramide Δ ABC bestimmt ist.

<u>Lösung in Kurzform:</u>

3.a)	Seitenkanten	$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$
		$\lvert\overrightarrow{AC}\rvert = 6\,\text{LE}$	$\lvert\overrightarrow{BC}\rvert = 6\,\text{LE}$	$\lvert\overrightarrow{DC}\rvert = 6\,\text{LE}$
		$\overrightarrow{AC} \circ \overrightarrow{BC} = 0$	$\overrightarrow{AC} \circ \overrightarrow{DC} = 0$	$\overrightarrow{BC} \circ \overrightarrow{DC} = 0$
		$\rightarrow$ die Vektoren sind gleich lang und paarweise orthogonal zueinander		
	Volumen	Grundfläche rechtwinkliges Dreieck Δ ABC		
		mit $A = 0{,}5 \cdot \lvert\overrightarrow{AC}\rvert \cdot \lvert\overrightarrow{BC}\rvert = 0{,}5 \cdot 6 \cdot 6 = 18\,\text{FE}$		

		Höhe $h = \left\|\overrightarrow{DC}\right\| = 6\,\text{LE}$
		$\rightarrow \quad V = 1/3 \cdot A \cdot h = 1/3 \cdot 18 \cdot 6 = 36\,\text{VE}$
3.b)	Mittelpunkt von $\overline{DC}$	$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OD} + 0{,}5 \cdot \overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix} + 0{,}5 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$
		M (3 ; 7 ; 4)
	F liegt auf $\overline{BD}$	Gerade g(B;D): $\vec{x} = \overrightarrow{OD} + r \cdot \overrightarrow{DB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$
		für r = 2/3 ist F $\in$ g , da $\begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix} + \frac{2}{3} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$
		und da 0 < r < 1 ist, liegt F zwischen D und B und damit auf $\overline{BD}$
3.c)	Ebene E(F;M;G)	Parametergleichung E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$
	mit G (–1 ; 3 ; 4)	aus $0 = 4n_x - n_z$ und $0 = -4n_x - 4n_z$ folgt mit $n_x = 1$
		ein möglicher Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$
		Normalengleichung E: $\left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} \right) \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = 0$
		$\rightarrow$ (x – 3)·1 + (y – 7)·(-1) + (z – 4)·4 = 0
		Koordinatengleichung E: x – y + 4z = 12
3.d)	Schnittpunkt H Seitenkante $\overline{AD}$ mit E	Geradengleichung g(A,D): $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$
		in die Ebene E : $(3 + 0r) - (1 + 6r) + 4(1 + 6r) = 12$ $\rightarrow$ r = 1/3
		$\overrightarrow{OH} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$
		$\rightarrow$ H (3 ; 3 ; 3)
3.e)	Flächeninhalt	$\overrightarrow{HF} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ | $\overrightarrow{HM} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

	Δ HFM	$\left\vert\overrightarrow{HF}\right\vert = \sqrt{32}$ LE $\left\vert\overrightarrow{HM}\right\vert = \sqrt{17}$ LE
		$\cos\angle\left(\overrightarrow{HF};\overrightarrow{HM}\right) = \dfrac{\overrightarrow{HF}\circ\overrightarrow{HM}}{\left\vert\overrightarrow{HF}\right\vert\cdot\left\vert\overrightarrow{HM}\right\vert} = \dfrac{0+16+0}{\sqrt{32}\cdot\sqrt{17}} \approx 0{,}686$
		$\rightarrow\ \alpha = \angle\left(\overrightarrow{HF};\overrightarrow{HM}\right) \approx 46{,}69°$
		$\rightarrow\ A_{\Delta HFM} = 0{,}5\cdot\left\vert\overrightarrow{HF}\right\vert\cdot\left\vert\overrightarrow{HM}\right\vert\cdot\sin\alpha \approx 8{,}49$ FE
3.f)	Winkel	Winkel zwischen den Ebenen ist gleich dem Winkel zwischen den Normalenvektoren
		$\overrightarrow{CD}\perp E_{ABC}$ (in a) gezeigt)
		$\rightarrow\ \overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix}0\\0\\6\end{pmatrix}$ ist ein Normalenvektor von E_1
		Normalenvektor von E ist $\vec{n} = \begin{pmatrix}1\\-1\\4\end{pmatrix}$
		$\rightarrow\ \cos\angle(E;E_1) = \cos\angle\left(\overrightarrow{CD};\vec{n}\right) = \dfrac{24}{6\cdot\sqrt{18}} \approx 0{,}943$
		$\rightarrow\ \alpha = 43{,}3°$