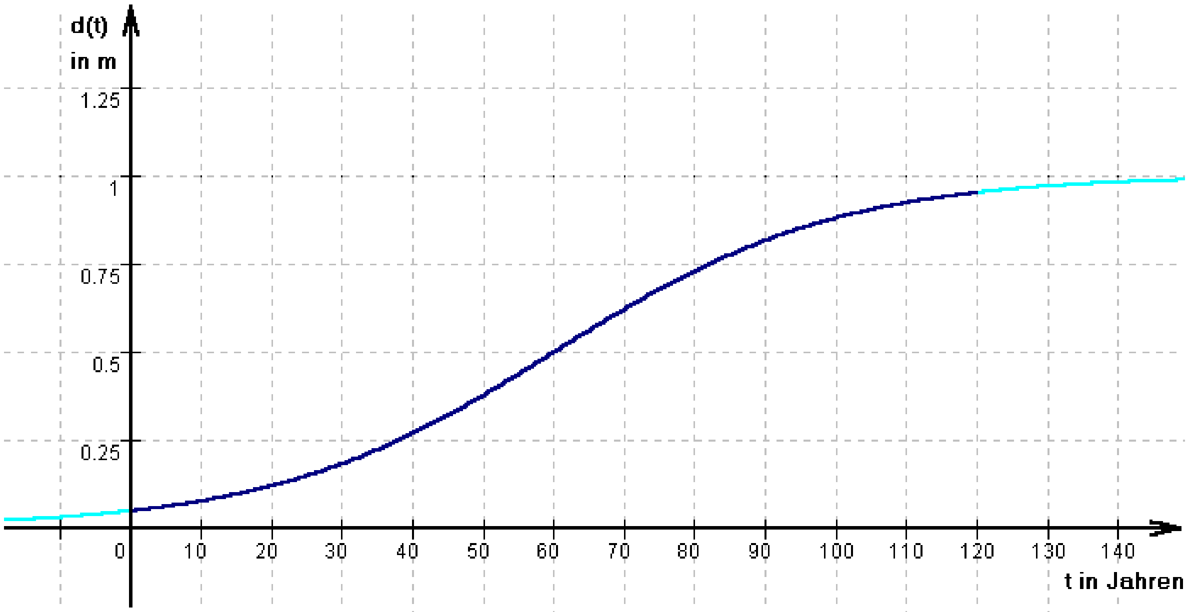
Lösungen Klausur Gk ma-2 14.06.2000

1. $d(t) = \dfrac{1}{1+e^{-0,05(t-60)}}$

a) $d(20) = \dfrac{1}{1+e^{-0,05\cdot(-40)}} = \dfrac{1}{1+e^{2}} \approx 0{,}1192$ → d = 11,92 cm

$d(100) = \dfrac{1}{1+e^{-0,05\cdot 40}} = \dfrac{1}{1+e^{-2}} \approx 0{,}8808$ → d = 88,08 cm

b)



c)

$$d(t) = 0{,}40 = \frac{1}{1+e^{-0,05(t-60)}}$$

$$0{,}40\cdot(1+e^{-0,05(t-60)}) = 1$$

$$0{,}40 + 0{,}40\cdot e^{-0,05(t-60)} = 1$$

$$0{,}40\cdot e^{-0,05(t-60)} = 0{,}60$$

$$e^{-0,05(t-60)} = 1{,}5$$

$$-0{,}05\cdot(t-60) = \ln 1{,}5$$

$$t-60 = \frac{\ln 1{,}5}{-0{,}05}$$

$$t = \frac{\ln 1{,}5}{-0{,}05} + 60 \approx 51{,}9$$ → t = 51,9 Jahre

d) $\lim\limits_{t\to\infty} d(t) = \lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{1}{1+e^{-0,05(t-60)}} = \lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{1}{1+e^{-0,05t+3}} = \dfrac{1}{1+0}$, da $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x} = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{x} = 0$

$\lim\limits_{t\to\infty} d(t) = 1$ → d wird höchstens 1 m = 100 cm

2. $f_a(x) = 2x^2 \cdot e^{ax} \qquad (a, x \in \mathbb{R})$

a) !!! in der Klausur soll nur f_1 (a = 1) untersucht werden, hier die Untersuchung der Schar f_a !

- Ableitungen

$f_a'(x) = 4x \cdot e^{ax} + 2x^2 \cdot e^{ax} \cdot a = e^{ax} \cdot (4x + 2ax^2)$

$f_a''(x) = e^{ax} \cdot a \cdot (4x + 2ax^2) + e^{ax} \cdot (4 + 4ax) = e^{ax} \cdot (2a^2x^2 + 8ax + 4)$

$f_a'''(x) = e^{ax} \cdot a \cdot (2a^2x^2 + 8ax + 4) + e^{ax} \cdot (4a^2x + 8a) = e^{ax} \cdot (2a^3x^2 + 12a^2x + 12a)$

- Schnittpunkte mit den Achsen

y-Achse: $f(0) = 0 \quad \rightarrow \quad$ Y(0 ; 0) = N

x-Achse : $f_a(x_N) = 0 = 2x^2 \cdot e^{ax}$

$e^x \neq 0$ für alle x

$2x^2 = 0$ für x = 0 , schon gefunden

→ einzige NST ist N (0 ; 0)

- Symmetrieverhalten

$f_a(-x) = 2(-x)^2 \cdot e^{a(-x)} = 2x^2 \cdot e^{-ax} \neq f_a(x)$ und

$f_a(-x) \neq -f_a(x) \qquad \rightarrow \quad$ keine Symmetrie erkennbar

- Extrema

$f_a'(x) = 0 \wedge f_a''(x) \neq 0$

$0 = e^{ax} \cdot (4x + 2ax^2)$

$e^x \neq 0$ für alle x

$0 = 4x + 2ax^2 = x(4 + 2ax)$ für $x_{E1} = 0$ und $x_{E2} = -\dfrac{2}{a}$

$f_a''(0) = 4 > 0$ → lokales Minimum (unabhängig von a)

$f_a''\left(-\dfrac{2}{a}\right) = e^{-2} \cdot (8 - 16 + 4) = -4e^{-2} < 0$ → lokales Maximum (unabhängig von a)

$f_a(0) = 0 \qquad \rightarrow \quad$ T (0 ; 0) = N

$f_a\left(-\dfrac{2}{a}\right) = \dfrac{8}{a^2}e^{-2} = \dfrac{8}{a^2e^2} \qquad \rightarrow \quad \mathrm{H}\left(-\dfrac{2}{a}; \dfrac{8}{a^2e^2}\right)$

Art der Extrema unabhängig von a, allein die Lage des Hochpunktes wird von a beeinflusst:
(für a > 0 liegt H im II. Quadranten, für a < 0 liegt H im I. Quadranten)

- Wendepunkte

$f_a''(x) = 0 \wedge f_a'''(x) \neq 0$

$0 = e^{ax} \cdot (2a^2x^2 + 8ax + 4)$

$e^x \neq 0$ für alle x

$0 = 2a^2x^2 + 8ax + 4$

$0 = x^2 + \dfrac{4}{a}x + \dfrac{2}{a^2}$ führt auf $x_{1,2} = -\dfrac{2}{a} \pm \sqrt{\dfrac{4}{a^2} - \dfrac{2}{a^2}} = -\dfrac{2}{a} \pm \dfrac{\sqrt{2}}{a}$

$x_{W1} = \dfrac{-2 + \sqrt{2}}{a} \approx \dfrac{-0{,}586}{a} \qquad x_{W2} = \dfrac{-2 - \sqrt{2}}{a} \approx \dfrac{-3{,}414}{a}$

Überprüfung mit $f_a'''(x)$

(lass ich jetzt mal weg, ist zu anstrengend, das wird schon nicht Null werden)

$$\rightarrow \quad W_1\left(\frac{-0{,}586}{a};\frac{0{,}686}{a^2}\cdot e^{-0{,}586}\right) \quad \text{und} \quad W_2\left(\frac{-3{,}414}{a};\frac{23{,}314}{a^2}\cdot e^{-3{,}414}\right) \quad \text{(schrecklich!)}$$

- Grenzverhalten

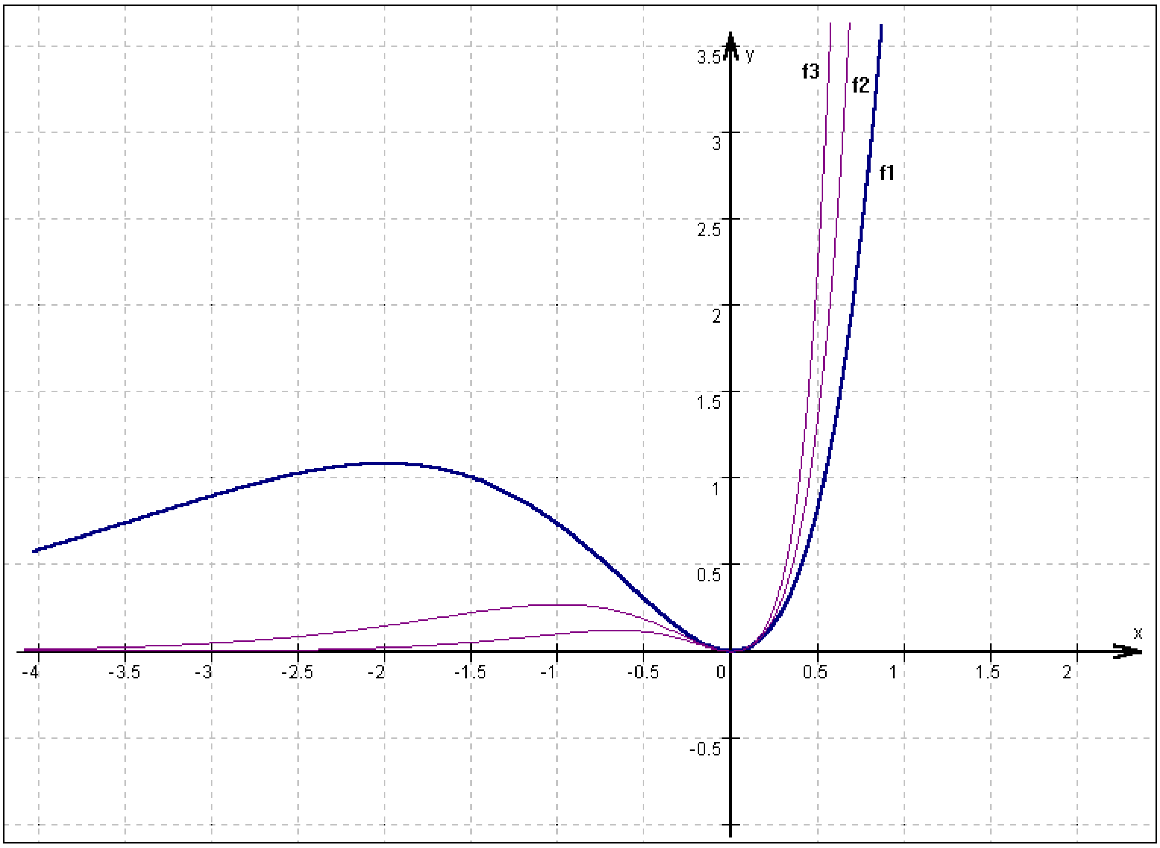
$\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^2e^{ax} = \infty$ für a > 0 und $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^2e^{ax} = 0$ für a < 0

$\lim\limits_{x\to-\infty} 2x^2e^{ax} = 0$ für a > 0 und $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x^2e^{ax} = \infty$ für a < 0

(da $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{ax} = 0$ stärker wirkt als $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x^2 = +\infty$)

- Graph von f_1 (ergänzend f_2 und f_3)

mit N (0 ; 0) = T , H (-2 ; 1,083) , W_1 (-0,586 ; 0,38) , W_2 (-3,414 ; 0,77)



b) Wendetangenten an f_1

W_1 (-0,586 ; 0,38) $\rightarrow$ $f_1'(-0{,}586) = m_{t1} \approx -0{,}92 = \tan\alpha_{t1}$ $\rightarrow$ $\alpha_{t1} = -42{,}7°$

$0{,}38 = -0{,}92\cdot(-0{,}59) + n$ $\rightarrow$ $n = -0{,}163$

Tangente t_1: $y = -0{,}92x - 0{,}163$

W_2 (-3,414 ; 0,77)) $\rightarrow$ $f_1'(-3{,}414) = m_{t2} \approx 0{,}318 = \tan\alpha_{t2}$ $\rightarrow$ $\alpha_{t2} = 17{,}63°$

$0{,}77 = 0{,}318\cdot(-3{,}414) + n$ $\rightarrow$ $n = 1{,}86$

Tangente t_2: $y = 0{,}318x + 1{,}86$

c) Einfluss von a auf Art für Extrema und Grenzverhalten schon in der Diskussion bei a) geklärt

d) Graphen der Funktionen für $a = 2$ und $a = -1/2$