Abitur Mathematik LK 1999/2000 1. Analysis–Logarithmusfunktion LÖSUNGEN (Kurzform)

$f_a(x) = (\ln x)^2 - \ln x^a \qquad (a \in \aleph)$

a)	Definitionsbereich	$x \in \Re^+$, da ln x nicht definiert ist für alle $x \le 0$
b)	Nullstellen von f_a	$0 = (\ln x)^2 - a \cdot \ln x = \ln x \cdot (\ln x - a)$
		→ $x_1 = 1$; $x_2 = e^a$
	Nullstellen von f_2	→ $x_1 = 1$; $x_2 = e^2$
c)	Extrema	$f_a'(x) = \frac{1}{x} \cdot (\ln x - a) + \ln x \cdot \frac{1}{x} = \frac{2}{x} \cdot \ln x - \frac{a}{x} = 0$
		→ $2 \ln x - a = 0$ → $x_E = e^{\frac{a}{2}}$
		$f_a''(x) = -\frac{2}{x^2} \cdot \ln x + \frac{2}{x} \cdot \frac{1}{x} + \frac{a}{x^2} = -\frac{2}{x^2} \cdot \ln x + \frac{2+a}{x^2}$
		→ $f_a''(e^{\frac{a}{2}}) = -\frac{2}{e^a} \cdot \frac{a}{2} + \frac{2+a}{e^a} = \frac{2}{e^a} > 0$ → Minimum für alle a
		→ $f_a(e^{\frac{a}{2}}) = \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{2} = -\frac{a^2}{4}$
		→ Tiefpunkt $T\left(\sqrt{e^a} \;;\; -\frac{a^2}{4}\right)$
d)	Extremum von f_2	$T(e \;;\; -1)$
	Wendepunkt von f_2	$f_2''(x) = -\frac{2}{x^2} \cdot \ln x + \frac{4}{x^2} = -\frac{2}{x^2} \cdot (\ln x - 2) = 0$
		—> $x_W = e^2$
		$f_2'''(x) = \frac{4}{x^3} \cdot (\ln x - 2) - \frac{2}{x^2} \cdot \frac{1}{x}$
		—> $f_2'''(e^2) = \frac{4}{e^6} \cdot (2-2) - \frac{2}{e^6} = -\frac{2}{e^6} \neq 0$
		—> Wendepunkt $W(e^2 \;;\; 0) = N_2$
e)	Graph f_2	siehe unten
f)	Nullstellentangenten	N_1 : $m_1 = f_2'(1) = 2 \ln 1 - 2 = -2$
		—> $0 = -2 \cdot 1 + n_1$ —> $n_1 = 2$ —> t_{N1} : $y = -2x + 2$
		N_2 : $m_2 = f_2'(e^2) = \frac{2}{e^2} \cdot \ln e^2 - \frac{2}{e^2} = \frac{2}{e^2}$
		—> $0 = \frac{2}{e^2} \cdot e^2 + n_2$ —> $n_2 = -2$ —> t_{N2} : $y = \frac{2}{e^2} x - 2$
	Darstellung Tangenten	siehe unten

g)	Ansatz Flächeninhalt	$A = \left\lvert \int_1^{e^2} f_2(x)dx \right\rvert = \left\lvert \int_1^{e^2} (\ln x \cdot (\ln x - 2)) \right\rvert$
	Integration	partiell mit $u' = \ln x \quad \text{—>} \quad u = x\ln x - x$
		und $v = \ln x - 2 \quad \text{—>} \quad v' = \frac{1}{x}$
		$A = \left\lvert [(x\ln x - x)\cdot(\ln x - 2)]_1^{e^2} - \int_1^{e^2} \left((x\ln x - x)\cdot\frac{1}{x} \right) dx \right\rvert$
		$A = \left\lvert [(x\ln x - x)\cdot(\ln x - 2)]_1^{e^2} - \int_1^{e^2} ((\ln x - 1))dx \right\rvert$
		$A = \left\lvert [(x\ln x - x)\cdot(\ln x - 2)]_1^{e^2} - [x\ln x - x - x]_1^{e^2} \right\rvert$
		$A = \lvert ((e^2\cdot 2 - e^2)\cdot(2-2)) - ((\ln 1 - 1)\cdot(\ln 1 - 2)) - ((e^2\cdot 2 - 2e^2) - (\ln 1 - 2) \rvert$
		$A = \lvert (e^2\cdot 0 - 2) - (0+2) \rvert = \lvert -4 \rvert = 4FE$

graphische Darstellung: