Abitur Mathematik LK 1999/2000 3. Analytische Geometrie LÖSUNGEN (Kurzform)		
A (8 ; 0 ; 0) , B (8 ; 3 ; 0) , C_t (4t+5 ; 3 ; –3t) , D (0 ; 0 ; 6)		
a)	Gerade g (C_t)	$\vec{x}=\begin{pmatrix}5\\3\\0\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}4\\0\\-3\end{pmatrix}$ (abzulesen)
	Ebene E (A,B) $\parallel$ g	$\vec{x}=\begin{pmatrix}8\\0\\0\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}4\\0\\-3\end{pmatrix}$
		Normalenvektor : $3\,n_y = 0$ —> $n_y = 0$
		$4\,n_x - 3\,n_z = 0$ —> $n_x = 0{,}75\,n_z$
		—> $\vec{n}=\begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix}$ —> E : $\left(\vec{x}-\begin{pmatrix}8\\0\\0\end{pmatrix}\right)\circ\begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix}=0$
b)	rechte Winkel ΔABC_t	$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BC_t}=\begin{pmatrix}4t-3\\0\\-3t\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC_t}=\begin{pmatrix}4t-3\\3\\-3t\end{pmatrix}$
		Weil $\overrightarrow{AB}\circ\overrightarrow{BC_t}=0$ unabhängig von t immer wahr ist, haben alle Dreiecke ABC_t einen rechten Winkel bei B. Weitere rechte Winkel sind damit unmöglich.
c)	gleichschenklig	Wegen a) kann, wenn überhaupt, nur $\left\lvert\overrightarrow{AB}\right\rvert=\left\lvert\overrightarrow{BC_t}\right\rvert$ gelten.
		$\left\lvert\overrightarrow{AB}\right\rvert=3=\sqrt{(4t-3)^2+(-3t)^2}$
		—> $9=25t^2-24t+9$ —> $0=(25t-24)\cdot t$
		Für $t_1 = 0{,}96$ und $t_2 = 0$ ist das Dreieck gleichschenklig.
d)	Schrägbild	mit C_0 (5 ; 3 ; 0) und $C_{0,96}$ (8,84 ; 3 ; –2,88)
e)	Volumen	Tetraeder ABC_tD mit:
		$\overrightarrow{AC_t}=\begin{pmatrix}4t-3\\3\\-3t\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AD}=\begin{pmatrix}-8\\0\\6\end{pmatrix}$
		und Normalenvektor n auf der Ebene E_2 (ABD)
		$\vec{n}\perp\overrightarrow{AB}$ und $\vec{n}\perp\overrightarrow{AD}$
		$\vec{n}=\begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix}$ (!) (geometrische Schlussfolgerung schon an dieser Stelle möglich)
		$V=\frac{1}{6}\cdot\frac{\left\lvert\vec{n}\circ\overrightarrow{AC_t}\right\rvert}{\lvert\vec{n}\rvert}\cdot\sqrt{\left\lvert\overrightarrow{AB}\right\rvert^2\cdot\left\lvert\overrightarrow{AD}\right\rvert^2-\left(\overrightarrow{AB}\circ\overrightarrow{AD}\right)^2}$
		$V=\frac{1}{6}\cdot\frac{\lvert 3\cdot(4t-3)-12t\rvert}{\sqrt{9+16}}\cdot\sqrt{9\cdot 100-0}=\frac{1}{6}\cdot\frac{\lvert -9\rvert}{5}\cdot 30=9$ VE

		Das Volumen ist unabhängig von t . Das ist nur möglich, wenn alle Punkte C_t von der durch A, B und D aufgespannten Ebene E_2 denselben Abstand besitzen. (Prinzip von Cavalieri), die Gerade g (C_t) also parallel zu E_2 verläuft.
f)	Abstand C_t von E_2	Flächeninhalt ΔABD : $A = 0{,}5 \cdot \left\| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} \right\| = 15$ FE
		Abstand d ist Höhe des Tetraeders :
		Aus $V = \frac{1}{3} \cdot A \cdot h$ folgt $d = \frac{3V}{A} = \frac{27}{15} LE = 1{,}8 LE$
g)	$\left\| \overrightarrow{BC_{0,48}} \right\|$ minimal ?	Aus 3.c) : $\left\| \overrightarrow{AB} \right\| = \left\| \overrightarrow{BC_0} \right\| = \left\| \overrightarrow{BC_{0,96}} \right\| = 3$ folgt, dass das Dreieck $\Delta BC_0 C_{0,96}$ gleichschenklig ist mit der Basis $C_0C_{0,96}$. Im gleichschenkligen Dreieck ist die Höhe (senkrecht zur Basis) gleich der Seitenhalbierenden, deren Fußpunkt $C_{0,48}$ ist. $\left\| \overrightarrow{BC_{0,48}} \right\| = h$ ist damit der minimalste Abstand von B zu g (C_t).
		$\left\| \overrightarrow{BC_{0,48}} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} -1{,}08 \\ 0 \\ -1{,}44 \end{pmatrix} \right\| = 1{,}8$ LE
		Der Abstand des Punktes B von der Geraden g stimmt überein mit dem Abstand aller Punkte C_t von der Ebene E_2 , $\overrightarrow{BC_{0,48}}$ steht also senkrecht zur gesamten Ebene E_2 .