Schriftliches Abitur im Fach Mathematik

1998 / 99

Leistungskurs

Aufgabe 1 Analysis 40% (Lösungen, Kurzform**)**			
a)	Ableitungen: $f_a'(x) = a \cdot e^x - 2 \cdot e^{2x}$, $f_a''(x) = a \cdot e^x - 4 \cdot e^{2x}$, $f_a'''(x) = a \cdot e^x - 8 \cdot e^{2x}$		
	NST:	$0 = a \cdot e^x - e^{2x} = e^x \cdot (a - e^x)$	
		$0 = a - e^x$, da $e^x \neq 0$ für alle x	
		$x_0 = \ln a$	$N(\ln a \quad ; \quad 0)$
	Extrema:	$f_a'(x) = 0 = a \cdot e^x - 2 \cdot e^{2x}$ (analoge Vorgenhensweise wie bei NST)	
		$x_E = \ln\left(\frac{a}{2}\right)$	
		$f_a''(x_E) = -\frac{a^2}{2} < 0$ --> Hochpunkt	$T\left(\ln\left(\frac{a}{2}\right) \quad ; \quad \frac{a^2}{4}\right)$
	WP:	$f_a''(x) = 0 = a \cdot e^x - 4 \cdot e^{2x}$ (wieder analoge Vorgehensweise)	
		$x_W = \ln\left(\frac{a}{4}\right)$	
		$f_a'''(x_W) = -\frac{a^2}{4} \neq 0$ --> Wendepunkt	$W\left(\ln\left(\frac{a}{2}\right) \quad ; \quad \frac{3}{16}a^2\right)$
	Verhalten für große $\lvert x \rvert$:	$\lim\limits_{x \to +\infty}\left(a \cdot e^x - (e^x)^2\right) = -\infty$, da $(e^x)^2$ dominiert	
		$\lim\limits_{x \to -\infty}\left(a \cdot e^x - (e^x)^2\right) = 0$, da $e^x \to 0$ für $x \to -\infty$	
	Graph:	siehe unten	
b)	Ortskurve der Hochpunkte:	$x = \ln\left(\frac{a}{2}\right) \to a = 2 \cdot e^x \to y = \frac{a^2}{4} = e^{2x}$	
		$O(x) = e^{2x}$	
c)	Graph von g(x) siehe unten		
	Schnittpunkte von $f_a(x)$ und g(x):	$3 \cdot e^x - e^{2x} = -0{,}5 \cdot e^x \to 0 = 3{,}5 \cdot e^x - e^{2x}$	

		wieder analog zu NST $x_S = \ln 3{,}5 \approx 1{,}253$
	$A_k = \int\limits_k^{\ln 3,5} (f_3(x) - g(x))dx = \int\limits_k^{\ln 3,5} (3{,}5 \cdot e^x - e^{2x})dx = [3{,}5 \cdot e^x - 0{,}5 \cdot e^{2x}]_k^{\ln 3,5}$	
	$A = \lim\limits_{k \to -\infty} (6{,}125 - (3{,}5 \cdot e^k - 0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot e^{2k})) = 6{,}125 FE$	
d)	Schnittwinkel zwischen Nullstellen- und Wendestellentangente:	
	Anstieg NST-Tangente: $m_N = f_a'(x_N) = -a^2$	
	Anstieg WP-Tangente: $m_W = f_a'(x_W) = 0{,}125 \cdot a^2$	
	Schnittwinkel: $\tan \alpha_S = \dfrac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2}$, je nachdem wird daraus $\alpha_S = \arctan\left(\dfrac{\pm 9 \cdot a^2}{8 - a^4}\right)$	
	für $\alpha_S = 45°$ ist $\tan \alpha_S = 1$ und daraus	
	entweder $0 = a^4 - 9 \cdot a^2 - 8$ und also $a_1 = 3{,}133$	
	oder $0 = a^4 + 9 \cdot a^2 - 8$ und also $a_2 = 0{,}903$	

Graphen: