Schriftliches Abitur im Fach Mathematik

1998 / 99

Leistungskurs

Aufgabe 2 Analysis 30% (Lösungen, Kurzform**)**		
a)	Ableitungen: $f_a'(x) = \frac{-x^2 + a^2}{(x^2 + a^2)^2}$, $f_a''(x) = \frac{2x^3 - 6a^2 x}{(x^2 + a^2)^3}$, dritte Ableitung nicht gefordert	
	Symmetrie:	$f_a(-x) = \frac{-x}{(-x)^2 + a^2} = -\frac{x}{x^2 + a^2} = -f_a(x)$ --> Punktsymmetrie zum Koordinatenursprung
	Asymptoten:	$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f_a(x) = 0$, die x-Achse ist Asymptote (Grad Zählerpolynom < Grad Nennerpolynom)
	Polstellen:	Nennerpolynom $x^2 + a^2 > 0$ für alle x und a --> keine Polstellen (dies trifft auch für die Nennerpolynome der Ableitungen zu, deshalb im Folgenden nur Untersuchung der jeweiligen Zählerpolynome)
	NST:	$ZP(x) = 0$ nur für x = 0 , ein Schnittpunkt bei N(0 ; 0)
	Extrema:	notwendige Bedingung: $f_a'(x) = 0$ --> $ZP(x) = 0 = -x^2 + a^2$ nur bei $x_{E1,2} = \pm a$
		hinreichende Bedingung: $f_a''(+a) = \frac{-4a^3}{8a^6} < 0$ lokales Maximum $f_a''(-a) = \frac{4a^3}{8a^6} > 0$ lokales Minimum
		zwei Extrema: $H\left(a \quad ; \quad \frac{1}{2a}\right)$ und $T\left(-a \quad ; \quad -\frac{1}{2a}\right)$
	Wendepunkte:	nur notwendige Bedingung zu untersuchen: $f_a''(x) = 0$ --> $ZP(x) = 0 = 2x^3 - 6a^2 x = x \cdot (2x^2 - 6a^2)$ nur bei $x_{W1} = 0$, $x_{W2,3} = \pm\sqrt{3} \cdot a$

		$W_1(0\ ;\ 0) = N$, $W_2\left(\sqrt{3}\cdot a\ ;\ \frac{\sqrt{3}}{4a}\right)$ und $W_3\left(-\sqrt{3}\cdot a\ ;\ -\frac{\sqrt{3}}{4a}\right)$
	Graph:	siehe unten
b)	Anstiege der Geraden HW_2 $\left(m_1 = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4a} - \frac{1}{2a}}{\sqrt{3}\cdot a - a}\right)$ und TW_3 (hier nicht aufgeführt) gleich, --> die Geraden sind parallel	
	Anstiege der Geraden HW_3 $\left(m_2 = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{4a} - \frac{1}{2a}}{-\sqrt{3}\cdot a - a}\right)$ und TW_2 (hier nicht aufgeführt) gleich, --> die Geraden sind ebenfalls parallel, damit ist das Viereck ein Parallelogramm.	
	Rechteck, wenn zusätzlich ein Winkel 90° beträgt, bzw, wenn für zwei der unterschiedlichen Anstiege gilt: $m_1 = -\frac{1}{m_2}$	
	$\frac{\frac{\sqrt{3}}{4a} - \frac{1}{2a}}{\sqrt{3}\cdot a - a} = -\frac{\sqrt{3}\cdot a + a}{\frac{\sqrt{3}}{4a} + \frac{1}{2a}}$ --> $\left(\frac{\sqrt{3}}{4a} - \frac{1}{2a}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{4a} + \frac{1}{2a}\right) = -\left(\sqrt{3}\cdot a + a\right)\left(\sqrt{3}\cdot a - a\right)$	
	$\frac{3}{16a^2} - \frac{1}{4a^2} = -\left(3a^2 + a^2\right)$ --> $a = \frac{1}{2\cdot\sqrt[4]{4}} \approx 0{,}354$	
c)	$g_a(x) = \ln\left(f_a(x)\right) = \ln\left(\frac{x}{x^2 + a^2}\right)$	
	$g_a(x) = 0$ nur bei $\frac{x}{x^2 + a^2} = 1$ --> $0 = x^2 - x + a^2$	

		$x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - a^2}$
	Fallunterscheidung:	
	zwei NST:	$\frac{1}{4} - a^2 > 0$ --> $0 < a < \frac{1}{2}$
	eine NST:	$\frac{1}{4} - a^2 = 0$ --> $a = \frac{1}{2}$
	keine NST:	$\frac{1}{4} - a^2 < 0$ --> $a > \frac{1}{2}$
Graph: