Schriftliches Abitur im Fach Mathematik

1998 / 99

Leistungskurs

Aufgabe 3 Analytische Geometrie 30% (Lösungen, Kurzform**)**			
a)	h gehört zur Kurvenschar, wenn es Werte für den Paramater a gibt, so daß die Richtungsvektoren von h und g_a voneinander linear abhängig sind und gleichzeitig mindestens ein Punkt von h (und damit alle) zu der gefundenen Geraden g_a gehört.		
	Untersuchung der Richtungsvektoren: Es muß $a^2 - 2a = a \cdot (a-2) = 0$ gelten.		
	h kann damit nur g_0 oder g_2 sein.		
	Punktprobe des Punktes (3 ; 1 ; -1) von h in g_0 und g_2 : h ist g_2 (und parallel zu g_0)		
b)	h und g_0 :	Aus a) folgte bereits die Parallelität der beiden Geraden.	
		Zu jedem Punkt von h (wir nehmen z.B. P(3 ; 1 ; -1)) gibt es genau einen Punkt X auf g_0, der von P einen kürzesten Abstand hat, welches der Abstand der beiden parallelen Geraden ist.	
		$\overline{PX} = \begin{pmatrix} 1+2\lambda-3 \\ 1-4\lambda-1 \\ -1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+2\lambda \\ -4\lambda \\ 0 \end{pmatrix}$	$\lvert\vec{PX}\rvert = \sqrt{(-2+2\lambda)^2 + (-4\lambda)^2}$ $\lvert\vec{PX}\rvert = f(\lambda) = \sqrt{4-8\lambda+20\lambda^2}$
		Wir suchen das Minimum der Funktion $f(\lambda)$, welches an derselben Stelle liegt wie das der Funktion $f^2(\lambda) = 20\lambda^2 - 8\lambda + 4$.	
		$f^{2'}(\lambda) = 40\lambda - 8 = 0$ --> $\lambda = 0{,}2$	(notwendige Bedingung für Extrema)
		$f^{2''}(0{,}2) = 40 > 0$ (Minimum)	(hinreichende Bedingung für Extrema)
		$\lvert\vec{PX}\rvert = f(0{,}2) = \sqrt{3{,}2} \approx 1{,}79$ ist der gesuchte Abstand.	
	h und g_1 :	Die Geraden können nicht parallel sein (aus a) folgend).	
		Eine Untersuchung auf Schnittpunkte $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$ ergibt keine Lösung. --> Die Geraden sind windschief.	
	eine Möglichkeit:	Abstand zweier windschiefer Geraden $\lvert\vec{GH}\rvert$ mit $G \in g_1$ und $H \in h$	

		mit Hilfe der Gleichung $\left\|\overrightarrow{GH}\right\| = \frac{\left\|(\vec{b}-\vec{a})\circ\vec{n}\right\|}{\left\|\vec{n}\right\|}$. ($\vec{b}$ ist Ortsvektor von g_1 , $\vec{a}$ ist Ortsvektor von h , $\vec{n}$ ist ein Vektor, der sowohl senkrecht auf g_1 als auch h steht.)
		Ermittlung von $\vec{n}$: z.B. $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
		$\left\|\overrightarrow{GH}\right\| = \frac{\left\|\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\|}{\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}} \approx 1{,}342$ ist der gesuchte Abstand.
c)	Allgemeine Untersuchung der Lagebeziehungen zwischen g_a und h in Abhängigkeit von a.	
	Unter a) bereits gefunden: Für $a_1 = 0$ sind die Geraden parallel, für $a_2 = 2$ sind die Geraden identisch.	
	Schnittpunktsuntersuchung:	
	$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ a^2+1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ a^2-2a \end{pmatrix}$ führt auf ein System linearer Gleichungen:	
	$\begin{array}{llcl} I & 2+2\mu-2\lambda & = & 0 \\ II & -a^2-4\mu+4\lambda & = & 0 \\ III & 0 & = & \lambda\cdot(a^2-2a) \end{array}$	
	$a^2-2a = 0$ ist nur möglich für die bereits gefundenen $a_1 = 0$ (Parallelität) und $a_2 = 2$ (Identität).	
	Einen Schnittpunkt kann es demnach nur für $\lambda = 0$ geben. Mit der Gleichung I ergibt sich dann $\mu = -1$.	
	Mit diesen beiden Werten wird aus Gleichung II : $-a^2 + 4 = 0$, was auf $a_2 = 2$ (sogar unendlich viele Schnittpunkte, wie unter a) gezeigt) und $a_3 = -2$ führt.	
	Vollständige Fallunterscheidung: Für $a_1 = 0$ sind g_a und h parallel, für $a_2 = 2$ identisch, für $a_3 = -2$ schneiden sie sich im Punkt S (1 ; 5 ; -1), für alle anderen Werte von a sind sie windschief.	
d)	Im Unterschied zu Aufgabe c), in der die allgemeine Lagebeziehung zwischen h = g_2 und der gesamten Schar g_a untersucht wurde, soll jetzt gezeigt werden, daß 1. g_0 nicht	

	nur mit g_2 keinen Schnittpunkt gemeinsam hat (Parallelität), sondern auch mit keiner anderen Geraden der Schar, unabhängig, ob sich dahinter Parallelität oder windschiefe Lage verbirgt.
	Der Schnitt zwischen g_0 und g_a führt dabei auf:
	$\begin{aligned} 1+2\lambda &= 1+2\mu \\ 1-4\lambda &= a^2+1-4\mu \\ -1 &= -1+(a^2-2a)\mu \end{aligned}$, wobei aus der 1. Gleichung sofort $\lambda = \mu$ folgt und damit die 2. Gleichung mit $a^2+1=1$ nur noch eine Lösung, $a=0$ besitzt, die auch für die 3. Gleichung auf eine wahre Aussage führt, was zu zeigen war. 2. soll gezeigt werden, dass g_1 keine zu sich parallele Gerade innerhalb der Schar besitzt, anders als g_2 , die nach c) einer anderen Geraden der Schar, zu g_0 parallel ist.
	Wir setzen also Parallelität von g_1 und g_a voraus, untersuchen dazu die Abhängigkeit der Richtungsvektoren:
	$\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ a^2-2a \end{pmatrix} = \nu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$ ν kann nach den ersten Koordinaten nur 1 sein, d.h. zu untersuchen sind die Lösungen der quadratischen Gleichung $a^2-2a=-1$, welche nur 1 ist, was zu zeigen war.