

Lösungen (Kurzform) 1. Klausur MA – 1 Stetigkeit, Differenzierbarkeit / Winkelfunktionen

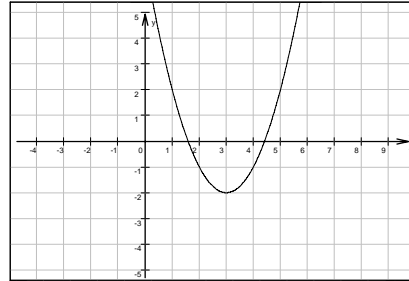
1. Eine Funktion f heißt an einer Stelle a stetig, wenn gilt:

(1) f ist an der Stelle a definiert,

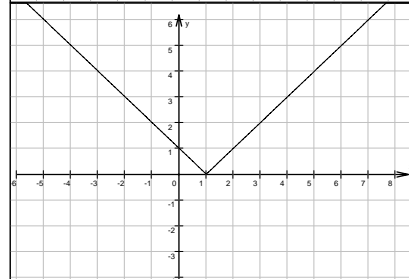
(2) $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existiert und

(3) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

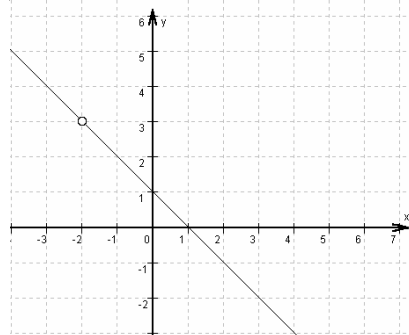
a) stetig und differenzierbar bei $a = 4$



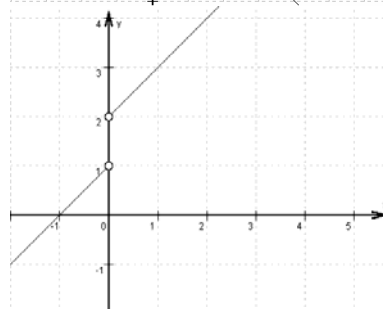
b) stetig und nicht differenzierbar bei $a = 1$



c) nicht definiert, aber stetig fortsetzbar bei $a = -2$



d) nicht definiert und nicht stetig fortsetzbar bei $a = 0$



2. a)

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{2}{3}} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\frac{2}{3}} \left(\frac{8x^2 + 2x - 15}{(2x + 3) \cdot x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\frac{2}{3}} \left(\frac{(2x + 3) \cdot (4x - 5)}{(2x + 3) \cdot x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\frac{2}{3}} \left(\frac{4x - 5}{x} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{2}{3}} f(x) = \frac{4 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) - 5}{-\frac{2}{3}} = \frac{23}{2}$$

$f(x)$ hat an der Stelle x_0 den Grenzwert $g = 11,5$.

$$b) \quad \lim_{x \rightarrow -2} g(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{x-2}{x+2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\left(-2 + \frac{1}{n}\right) - 2}{\left(-2 + \frac{1}{n}\right) + 2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{-4 + \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{1}{n} \cdot (-4n + 1)}{\frac{1}{n}} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (-4n + 1) = -\infty$$

$g(x)$ hat an der Stelle x_0 keinen Grenzwert.

$$c) \quad \lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x + 3 \cos x - 3}{5x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{5x} \right) + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cdot (\cos x - 1)}{5x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{5} \right) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right) + \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3}{5} \right) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x - 1}{x} \right) = \frac{1}{5} \cdot 1 + \frac{3}{5} \cdot 0 = \frac{1}{5}$$

$h(x)$ hat an der Stelle x_0 den Grenzwert 0,2.

3. $f(x) = \sin x + x - 2$

$$f'(x) = \cos x + 1$$

Wertetabelle zum Finden des Startwertes:

x	-1	0	1	2
f(x)	-3,84	-2	-0,16	0,91

Startwert z.B. : $x_1 = 1,5$

Newton-Verfahren:

$$\overline{x_{n+1}} = \overline{x_n} - \frac{f(\overline{x_n})}{f'(\overline{x_n})}$$

$\overline{x_n}$	$\overline{x_{n+1}}$
1,5	1,03537
1,03537	1,10462...
1,10462...	1,1060...
1,1060...	1,1060...

Die Nullstelle ist auf drei Nachkommastellen genau bei

$$x_0 \approx 1,106$$

4. $f(x) = \cos(2x) - \sin x$

a) kleinste Periode: 2π

Symmetrie: $f(-x) = \cos(2 \cdot (-x)) - \sin(-x) = \cos 2x + \sin x \neq f(x) \neq -f(x)$
keine erkennbare Symmetrie

b) Ableitungen: $f'(x) = -2 \sin(2x) - \cos x$
 $f''(x) = -4 \cos(2x) + \sin x$
 $f'''(x) = 8 \sin(2x) + \cos x$

Nullstellen: $0 = \cos(2x) - \sin x = 1 - 2 \sin^2 x - \sin x$

Substitution:

$$\sin x = z$$

$$0 = -2z^2 - z + 1 = z^2 + 0,5z - 0,5$$

$$z_1 = -1 \Rightarrow \sin x = -1 \Rightarrow x_{N1} = 1,5\pi \approx 4,712$$

$$z_2 = 0,5 \Rightarrow \sin x = 0,5 \Rightarrow x_{N2} \approx 0,524, \quad x_{N3} \approx 2,618$$

Extrema:

$$0 = -2 \sin(2x) - \cos x = -2 \cdot (2 \sin x \cdot \cos x) - \cos x$$

$$0 = \cos x \cdot (-4 \sin x - 1)$$

$$\cos x = 0 \Rightarrow \quad x_{E1} = 0,5\pi \quad f''(x_{E1}) = 5 > 0 \Rightarrow \text{Min}$$

$$x_{E2} = 1,5\pi \quad f''(x_{E2}) = 3 > 0 \Rightarrow \text{Min}$$

$$-4 \sin x - 1 = 0 \Rightarrow \quad x_{E3} \approx 3,39 \quad f''(x_{E3}) \approx -3,76 < 0 \Rightarrow \text{Max}$$

$$x_{E4} \approx 6,03 \quad f''(x_{E4}) \approx -3,76 < 0 \Rightarrow \text{Max}$$

$$T_1(0,5\pi \ ; \ -2)$$

$$H_1(3,39 \ ; \ 1,125)$$

$$T_2(1,5\pi \ ; \ 0) = N_1$$

$$H_2(6,03 \ ; \ 1,125)$$

Wendepunkte:

$$0 = -4 \cos(2x) + \sin x = -4 \cdot (1 - 2 \sin^2 x) + \sin x$$

Substitution:

$$\sin x = z$$

$$0 = 8z^2 + z - 4 = z^2 + 0,125z - 0,5$$

$$z_1 = \sin x_{W1,2} \approx 0,647 \quad x_{W1} \approx 0,704 \quad f'''(x_{W1}) \approx 8,7 \neq 0 \Rightarrow W$$

$$x_{W2} \approx 2,437 \quad f'''(x_{W2}) \approx -8,7 \neq 0 \Rightarrow W$$

$$z_2 = \sin x_{W3,4} \approx -0,772 \quad x_{W3} \approx 4,024 \quad f'''(x_{W3}) \approx 7,2 \neq 0 \Rightarrow W$$

$$x_{W4} \approx 5,401 \quad f'''(x_{W4}) \approx -7,2 \neq 0 \Rightarrow W$$

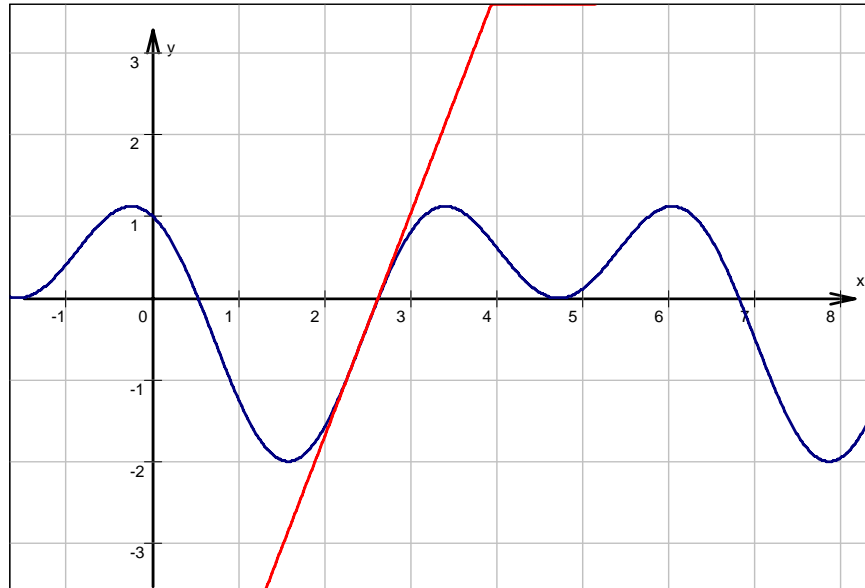
$$W_1(0,704 \ ; \ -0,486)$$

$$W_2(2,437 \ ; \ -0,486)$$

$$W_3(4,024 \ ; \ 0,579)$$

$$W_4(5,401 \ ; \ 0,579)$$

c) Graph:



d) $W_2(2,437 \ ; \ -0,486)$

$$m_t = f'(x_{W2}) \approx 2,736$$

$$-0,486 = 2,736 \cdot 2,437 + n \Rightarrow n = -7,15$$

Die gesuchte Tangente hat die Gleichung:

$$y = 2,736 \cdot x - 7,15$$