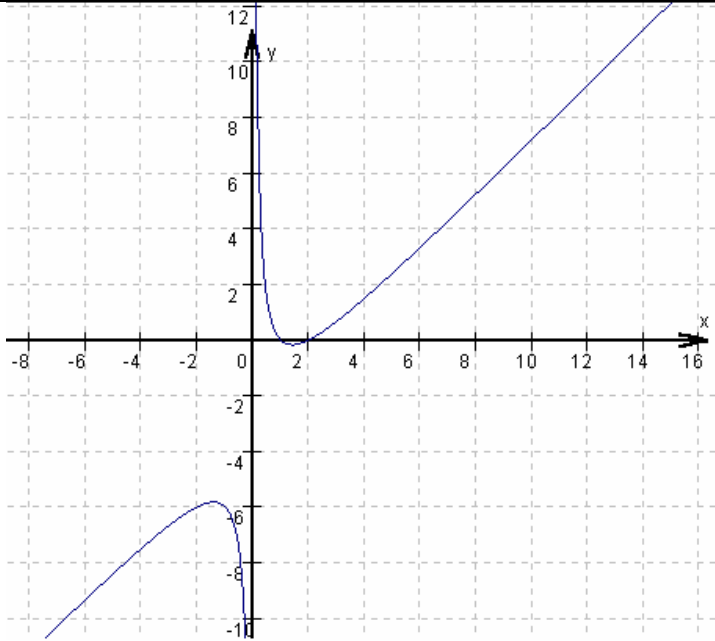
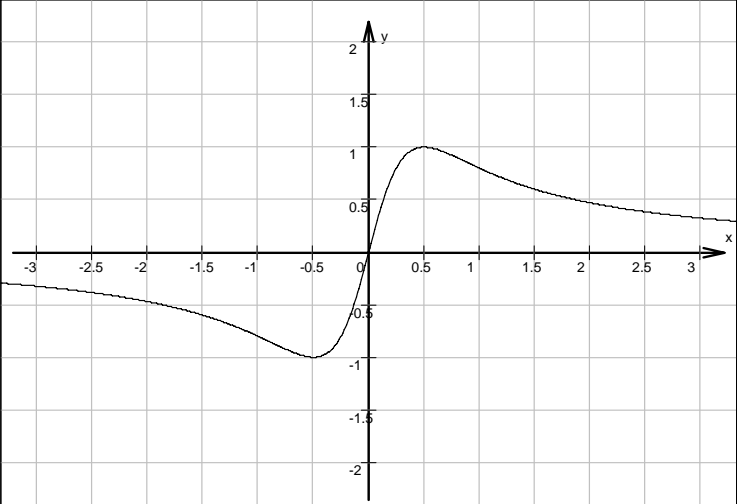


Lösungen (Kurzform) 1. Klausur MA – 2 Gebrochenrationale Funktionen

1. a)	$k = 1 :$ $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x}$
	Definitionsbereich: $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
	Verhalten für $x \rightarrow \pm\infty$: $f(x) = \frac{x^2}{x} - \frac{3x}{x} + \frac{2}{x} = x - 3 + \frac{2}{x}$ $A(x) = x - 3$ ist Asymptote
	Definitionslücke: $x_p = 0$ ist Polstelle mit Vorzeichenwechsel
	Symmetrie: $f(-x) \neq f(x)$ und $f(-x) \neq -f(x)$ Es ist keine Symmetrie erkennbar.
	Nullstellen: $x^2 - 3x + 2 = 0$ $x_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{8}{4}}$ $x_{N1} = 2$ $x_{N2} = 1$
	Ableitungen: $f'(x) = \frac{(2x - 3) \cdot x - (x^2 - 3x + 2)}{x^2} = \frac{x^2 - 2}{x^2}$ $f''(x) = \frac{2x \cdot x^2 - (x^2 - 2) \cdot 2x}{x^4} = \frac{4}{x^3}$
	Extrema: $x^2 - 2 = 0$ $x_{E1} = \sqrt{2}$ $x_{E2} = -\sqrt{2}$
	$f''(x_{E1}) = \frac{2}{\sqrt{2}} > 0$ Tiefpunkt
	$f''(x_{E2}) = -\frac{2}{\sqrt{2}} < 0$ Hochpunkt
	$T(\sqrt{2} ; -0,172)$
	$H(-\sqrt{2} ; -5,828)$
	Wendepunkte: $f''(x) \neq 0$ für alle x , keine Wendepunkte.
	Graph: 

	b)	Nullstellen der Kurvenschar: $x^2 - (k+2) \cdot x + k+1 = 0$
		$x_{1,2} = \frac{k+2}{2} \pm \sqrt{\frac{k^2+4k+4}{4} - \frac{4k+4}{4}} = \frac{k+2}{2} \pm \frac{k}{2}$
		$x_1 = k+1$
		$x_2 = 1$
		Die zweite Nullstelle ist unabhängig von k, was zu zeigen war.
	c)	$f'_k(x) = \frac{(2x - (k+2)) \cdot x - (x^2 - (k+2) \cdot x + k+1)}{x^2} = \frac{2x^2 - kx - 2x - (x^2 - kx - 2x + k+1)}{x^2}$
		$f'_k(x) = \frac{x^2 - k - 1}{x^2}$
		Die Extrema müssen $x^2 = k+1$ erfüllen, d.h. es gibt Extrema für alle $k \geq -1$.
		Eine Funktionen ist nur monoton fallend, wenn $f'_k(x) = x^2 - k - 1 < 0$, da der Nenner x^2 immer positiv bleibt. Es müsste also $x^2 < k+1$ gelten, für alle $k < -1$ müsste dann aber $x^2 < 0$ gelten, was nicht möglich ist, d.h. für alle $k < -1$ sind die Funktionen monoton steigend.
2.	a)	Punktsymmetrie zu O(0;0) Asymptote ist x-Achse keine Pole Nullstelle N(0;0) Extrema: $H\left(a; \frac{1}{2a}\right) \quad T\left(-a; -\frac{1}{2a}\right)$ Wendepunkte: $W_1(0;0)$ $W_2\left(a\sqrt{3}; \frac{\sqrt{3}}{4a}\right)$, $W_3\left(-a\sqrt{3}; -\frac{\sqrt{3}}{4a}\right)$
		
	b)	Nachweis elementargeometrisch oder mit Hilfe der Anstiege: $a = \frac{1}{2^{\frac{1}{4}}\sqrt{4}} \approx 0,354$