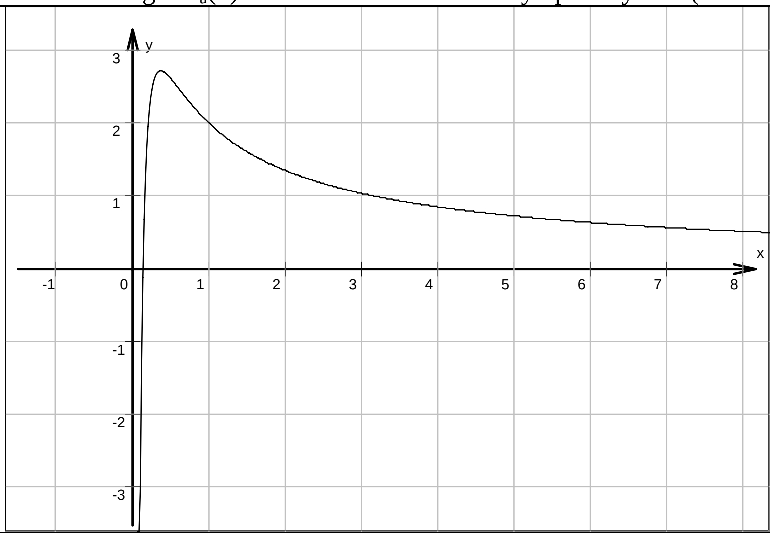
Lösungen (Kurzform) 2. Klausur MA – 2 Exponential – und Logarithmusfunktionen

1.	a)	Definitionsbereich:	$x \in \Re_+ \setminus \{0\}$
		Nullstelle:	$a + \ln x = 0$ $x_0 = e^{-a}$
	b)	Ableitungen:	$f_a'(x) = \dfrac{1 - a - \ln x}{x^2}$
			$f_a''(x) = \dfrac{-3 + 2a + 2\ln x}{x^3}$
		Extrema:	$1 - a - \ln x = 0$ $x_E = e^{1-a}$ $f_a''(x_E) < 0 \quad \Rightarrow$ Maximum $H\ (e^{1-a} ; e^{a-1})$
		Wendepunkte:	$-3 + 2a + 2 \cdot \ln x = 0$ $x_W = e^{1{,}5-a}$ $W\ (e^{1{,}5-a} ; 1{,}5 \cdot e^{a-1{,}5})$
	c)	Asymptoten:	für $x \to 0$ gilt $f_a(x) \to -\infty \quad \Rightarrow$ vertikale Asymptote $x = 0$ (y-Achse)
			für $x \to \infty$ gilt $f_a(x) \to 0 \quad \Rightarrow$ horizontale Asymptote $y = 0$ (x-Achse)
	d)	Graph für a = 2:	
	e)	Ortskurve Maxima: $x = e^{1-a}$ führt auf $a = 1 - \ln x$, $y = e^{a-1}$ bringt damit $y = e^{1-\ln x-1}$ $y = e^{-\ln x}$ $y = \dfrac{1}{x} \quad (x > 0)$		
	f)	Punktkoordinaten	$P_{a1}(1 ; a_1)$, $P_{a2}(1 ; a_2)$
		Steigungen	$f_{a1}'(1) = 1 - a_1$ $f_{a2}'(1) = 1 - a_2$
		Tangentengleichungen	$t_{a1} = (1 - a_1) \cdot x + 2a_1 - 1$ $t_{a2} = (1 - a_2) \cdot x + 2a_2 - 1$
		Schnittpunkt $S\ (2 ; 1)$ ist unabhängig von a.	
2.	a)	Ableitungen:	$f'(x) = e^{-0{,}5x^2} \cdot (-3x^2 + 6x)$
			$f''(x) = e^{-0{,}5x^2} \cdot (3x^4 - 15x^2 + 6)$
	b)	Symmetrie:	$f(-x) = f(x)$ Die Funktion ist achsensymmetrisch.
		Nullstellen:	$0 = 3x^2$, da $e^{-0{,}5x^2} \neq 0$ für alle x. $x_0 = 0$
		Extrema:	$0 = -3x^2 + 6x$, da $e^{-0{,}5x^2} \neq 0$ für alle x .
			$x_{E1} = 0$

			$f''(x_{E1}) = 6$ Minimum $f''(x_{E2}) = -12$ Maximum $x_{E3} = -\sqrt{2}$ $f''(x_{E3}) = -12$ Maximum
			T (0 ; 0) = N $H_1\left(\sqrt{2} \quad ; \quad 2{,}207\right)$ $H_2\left(-\sqrt{2} \quad ; \quad 2{,}207\right)$
		Wendepunkte:	$0 = 3x^4 - 15x^2 + 6$, da $e^{-0{,}5x^2} \neq 0$ für alle x .
			Substitution $x^2 = z$ $0 = 3z^2 - 15z + 6$ $0 = z^2 - 5z + 2$ $z_1 \approx 4{,}561$ $x_{W1,2} \approx \pm 2{,}136$ $z_2 \approx 0{,}438$ $x_{W3,4} \approx \pm 0{,}662$
			W_1 (2,136 ; 1,398) W_2 (– 2,136 ; 1,398) W_3 (0,662 ; 1,056) W_4 (– 0,662 ; 1,056)
	c)	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ da die Funktion achsensymmetrisch ist.	
		$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} (e^{-0{,}5x^2}) = 0$ da die e – Funktion immer stärker konvergiert als jede ganzrationale Funktion.	
	d)	Graph der Funktion im Intervall $-5 < x < 5$: