Lösungen (Kurzform) 1.Klausur MA–3 Lineare Algebra / Analytische Geometrie

1.

$$\left|\begin{array}{cccccc} 1 & 3 & -2 & 1 & \cdot(-2) & \cdot(-4) \\ 2 & -1 & 5 & 15 & \hookleftarrow & \\ 4 & 5 & 1 & 10 & & \hookleftarrow \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{ccccc} 1 & 3 & -2 & 1 & \\ 0 & -7 & 9 & 13 & \cdot(-1) \\ 0 & -7 & 9 & 6 & \hookleftarrow \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{cccc} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & -7 & 9 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{array}\right|$$

$0 = -7$ ist eine falsche Aussage.
Das Gleichungssystem hat keine Lösung.

2. Die Gleichungen

$$\begin{array}{ccccccc} z & + & s & + & k & = & 50 \\ 40z & + & 60s & + & 320k & = & 4100 \end{array}$$

führen auf das Gleichungssystem:

$$\left|\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 50 & \cdot(-40) \\ 40 & 60 & 320 & 4100 & \hookleftarrow \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 50 & \\ 0 & 20 & 280 & 2100 & :20 \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 50 \\ 0 & 1 & 14 & 105 \end{array}\right|$$

mit $k = r$, daraus $s = 105 - 14r$ und $z = 50 - (105 - 14r) - r = -55 + 13r$ ergibt sich als Lösungsmenge:

$$\begin{pmatrix} k \\ s \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 105 \\ -55 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -14 \\ 13 \end{pmatrix}$$

z , s und k müssen natürliche Zahlen sein und
wegen $z = -55 + 13r > 0$ folgt $r > 4$
und wegen $s = 105 - 14r > 0$ folgt $r < 8$.

Von den drei Lösungen
(k ; s ; z) = (5 ; 35 ; 10) (aus r = 5)
(k ; s ; z) = (6 ; 20 ; 23) (aus r = 6)
(k ; s ; z) = (7 ; 7 ; 36) (aus r = 7)
kann aufgrund der weiteren Bedingung „mehr als die Hälfte Schafe" (s > 25) nur die erste richtig sein.

Er kaufte 5 Kühe, 35 Schafe und 10 Ziegen.

3. Gleichung dritten Grades:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

f (0) = 1 führt auf d = 1
f (1) = 3 führt auf a + b + c + d = 3
f (2) = 25 führt auf 8a + 4b + 2c + d = 25
f' (1) = 9 führt auf 3a + 2b + c = 9

$$\left|\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & 2 & \cdot(-8) & \cdot(-3) \\ 8 & 4 & 2 & 24 & \hookleftarrow & \\ 3 & 2 & 1 & 9 & & \hookleftarrow \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 2 & \\ 0 & -4 & -6 & 8 & \downarrow \\ 0 & -1 & -2 & 3 & \cdot(-4) \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -6 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{array}\right|$$

Aus 2 c = – 4 folgt c = – 2 ,
aus – 4 b – 6 (–2) = 8 folgt dann b = 1 und
aus a + 1 – 2 = 2 folgt dann a = 3.

Die Funktion f hat die Gleichung:

$$f(x) = 3x^3 + x^2 - 2x + 1$$

4. a)

$$\vec{a} = \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 15 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{152} \approx 12{,}329 \qquad |\vec{b}| = \sqrt{250} \approx 15{,}811 \qquad |\vec{c}| = \sqrt{34} \approx 5{,}831$$

$$u = |\vec{a}| + |\vec{b}| + |\vec{c}| \approx 33{,}97$$

M_a (8 ; 1 ; – 2) M_b (5,5 ; 2,5 ; – 2) M_c (0,5 ; - 0,5 ; - 4)

$$S\left(\frac{14}{3} \;\; ; \;\; 1 \;\; ; \;\; -\frac{8}{3}\right)$$

$$\cos\alpha = 0{,}716 \qquad \cos\beta = -0{,}445 \qquad \cos\gamma = 0{,}944$$

$$\alpha = 44{,}29° \qquad \beta = 116{,}43° \qquad \gamma = 19{,}28°$$

$$A = 0{,}5 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\gamma \approx 32{,}18$$

b) D liegt in derselben Ebene, wenn z.B. gilt:

$$\overrightarrow{AD} = r \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{AC}\,.$$

$$\begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

führt eindeutig auf die Lösung r = – 1 und s = 1.
D liegt also in derselben Ebene.

c) Es ist mit

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d.h. gegenüberliegende Seiten sind parallel und gleich lang, ein Parallelogramm gezeigt.

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| \neq \left|\overrightarrow{BC}\right|,$$

d.h. das Parallelogramm ist keine Raute.

$$\angle ABC = \beta \neq 90°,$$

d.h. das Parallelogramm ist kein Rechteck.

Es handelt sich um ein Parallelogramm.

5. a) $\overrightarrow{OS} = \frac{1}{3} \cdot \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$

Aus

$$\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2-1+t+2 \\ 1+5-1 \\ 3+1+3-t \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

folgt eindeutig t = 1, d.h. für t = 1 ist S der Schwerpunkt des Dreiecks.

b) $\angle BAC = \alpha = 90°$

gilt, wenn

$$\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AC_t} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} t \\ -2 \\ -t \end{pmatrix} = 0.$$

Aus – 3 t – 8 + 2 t = 0 folgt t = – 8.

c) $\angle AC_tB = \gamma = 90°$

gilt, wenn

$$\overrightarrow{C_tA} \circ \overrightarrow{C_tB} = \begin{pmatrix} -t \\ 2 \\ t \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -3-t \\ 6 \\ -2+t \end{pmatrix} = 0.$$

Die Gleichung –t (– 3 – t) + 12 + t (– 2 + t) = t^2 + 0,5 t + 6 = 0 hat keine reelle Lösung, daher gibt es kein t , so dass gilt

$\gamma = 90°$.