Lösungen (Kurzform) 2. Klausur MA–3 Analytische Geometrie

1.		Punkte A (–5 ; 1 ; 8) , B (–5 ; –3 ; 4) , C (0 ; 9 ; 6)
	a)	Punkt–Richtungs–Gleichung: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix}$ Ansatz Normalenvektor: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2z \\ -z \\ z \end{pmatrix}$ Normalengleichung: $\left(\vec{x} - \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} \right) \circ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ Komponentendarstellung 2x – y + z + 3 = 0
	b)	Q (8 ; 6 ; –1) liegt nicht in E , da durch Einsetzen eine falsche Aussage entsteht.
	c)	$d = \left\| \frac{2 \cdot 8 - 5 + 10 + 3}{\sqrt{4+1+1}} \right\| = \left\| \frac{24}{\sqrt{6}} \right\| = \left\| 4 \cdot \sqrt{6} \right\| = 9{,}798$
		Lotfußpunkt: Die Gerade durch P mit dem Richtungsvektor $\vec{n}$ wird in E eingesetzt. F (0 ; 9 ; 6) = C
	d)	Geradengleichung: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} + \nu \cdot \begin{pmatrix} 13 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$
		$\sin\alpha = \sin\angle(g;E) = \frac{26 - 4 + 2}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{189}} = 0{,}7126$ α = 45,455°
	e)	z.B. h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} + \varphi \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}$
2.		Punkte A (–5 ; 1 ; 8) , B (–3 ; 3 ; 2) , C_a (2a–3 ; 2a–1 ; 3–a)
	a)	z.B. mit a = 0 C_0 (–3 ; –1 ; 3) und a = 1 C_1 (–1 ; 1 ; 2) oder direkt aus den Koordinaten g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$
	b)	h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$
		Das Gleichungssystem hat die Lösung λ = 1 und μ = 0.5. Schnittpunkt S (–1 ; 1 ; 2)
	c)	$\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC_a}}{2} = \begin{pmatrix} a-1 \\ a-1 \\ 2{,}5 - 0{,}5a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ a = 3

d)

$$\overrightarrow{AC_a} = \begin{pmatrix} 2a-4 \\ 2a \\ 1-a \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{BC_a} = \begin{pmatrix} 2a \\ 2a-4 \\ 1-a \end{pmatrix}$$

$\alpha = 90°$ führt auf $(2a-4)(-4) + 8a = 0$ falsche Aussage
$\beta = 90°$ führt auf $8a - 4(2a-4) = 0$ falsche Aussage

$\gamma = 90°$ führt auf $(-2a + 4)(-2a) + (-2a)(-2a + 4) + (-1+a)^2 = 0$ also $9a^2 - 18a + 1 = 0$ mit den Lösungen:

$$a_1 = 1 + \frac{1}{3}\sqrt{8} = 1{,}943$$

$$a_2 = 1 - \frac{1}{3}\sqrt{8} = 0{,}0572$$

e) immer gleichschenklig, weil:

$$\left|\overrightarrow{AC_a}\right| = \left|\overrightarrow{BC_a}\right| = \sqrt{9a^2 - 18a + 17}$$

f)

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{32} = \left|\overrightarrow{AC_a}\right|$$

führt auf $9a^2 - 18a + 17 = 32$ mit den Lösungen:

$$a_1 = 1 + \sqrt{\frac{8}{3}} = 2{,}633$$

$$a_2 = 1 - \sqrt{\frac{8}{3}} = -0{,}633$$

g) Punkt–Richtungs–Gleichung E :

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \nu \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \eta \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Normalengleichung:

$$\left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

Komponentenform $2x + 2y - z + 2 = 0$

Dreiecksfläche:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AP}\right| = \frac{1}{2} \cdot \left|\begin{matrix} -24 \\ -24 \\ 12 \end{matrix}\right| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1296} = 18$$

Höhe der Pyramide = Abstand des Punktes C_a auf die Ebene E

$$h = \left|\frac{2 \cdot (2a-3) + 2 \cdot (2a-1) - (3-a) + 2}{\sqrt{9}}\right| = \left|\frac{9a-9}{3}\right| = |3a-3| = 3 \cdot |a-1|$$

Volumen der Pyramide:

$$V = \frac{1}{3} \cdot A \cdot h = 18 \cdot |a-1|$$

Für V = 72 VE ergeben sich die beiden Lösungen $a_1 = 5$ und $a_2 = -3$.

h) Geradenschar k_a :

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2a-4 \\ 2a \\ 1-a \end{pmatrix}$$

Gerade p :

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Lagebeziehungen:

p und k_a sind parallel, wenn ihre Richtungsvektoren linear abhängig sind:

$$\begin{pmatrix} 2a-4 \\ 2a \\ 1-a \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} a &= 2 \\ t &= 1 \\ -1 &= -1 \end{aligned}$$

also nur für a = 2.

Sie sind sogar identisch, wenn ein Punkt von p zu k_2 gehört:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} 1 &= 1 \\ r &= 1 \\ 1 &= 1 \end{aligned}$$

kein Widerspruch, also sind für a = 2 die Geraden identisch.

Schnittpunktuntersuchung: p = k_a

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2a-4 \\ 2a \\ 1-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} r \cdot (2a-4) &= 0 \\ -1 &= 3 + 4s \\ 2 &= 2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} r &= 0 \\ s &= -1 \\ & wahr \end{aligned}$$

Für alle a $\neq 2$ schneiden sich p und k_a in genau einem Punkt S (1 ; –1 ; 2).