# Lösungen (Kurzform) Klausur MA–4 Wahrscheinlichkeit

1. **Kombinatorische Hilfsmittel**
   a) Zur Wahl stehen genau fünf Plätze „zwischen" den Damen, wovon drei gewählt werden können.
   Es handelt sich um eine geordnete Auswahl von k = 3 Elementen aus n = 5.

$$V_{oZ} = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{5!}{2!} = 5\cdot 4\cdot 3 = 60$$

(oder: Es gibt genau

$$C_{oZ} = \binom{5}{2} = \frac{5\cdot 4}{2\cdot 1} = 10$$

Möglichkeiten, zwei von den fünf Plätzen frei zu lassen. Zu jeder dieser Auswahl müssen alle Permutationen

$$P_3 = 3! = 6$$

der drei belegten Plätze kombiniert werden, da die Ordnung bei der Sitzverteilung eine Rolle spielt.
Die Anzahl der Möglichkeiten ist damit wieder

$$\binom{5}{2}\cdot 3! = 10\cdot 6 = 60$$

.

   b) $$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$$

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!\cdot(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!} = \binom{n}{k}$$

Die ungeordnete Auswahl von k Kugeln aus n vorhandenen Kugeln in einer Urne, lässt genau (n–k) Kugeln in der Urne zurück, ebenfalls ungeordnet. Es kann damit keinen Unterschied darstellen, ob k Kugeln entnommen werden, wofür es $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten gibt, oder aber ob (n–k) Kugeln entnommen werden, wofür es $\binom{n}{n-k}$ Möglichkeiten gibt.

2. **Klassische Wahrscheinlichkeit / Pfadregeln**
   Für die Entnahme von zwei Kugeln aus der ersten Urne (ohne Zurücklegen) ergeben sich die vier Möglichkeiten (ww) , (ws) , (sw) und (ss) mit folgenden Wahrscheinlichkeiten:

$$p(ww) = \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4} = \frac{3}{10} \qquad p(ws) = \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4} = \frac{3}{10} \qquad p(sw) = \frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4} = \frac{3}{10} \qquad p(ss) = \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{10}$$

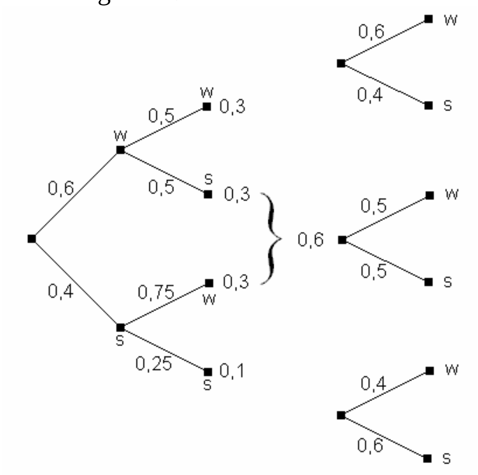
Da die beiden gezogenen Kugeln nun in die zweite Urne gelegt werden, sind die Möglichkeiten (ws) und (sw) dann nicht mehr unterscheidbar, ohne Berücksichtigung der Reihenfolge beim Ziehen aus der ersten Urne ergibt sich damit

$$p(1w+1s) = \frac{3}{10} + \frac{3}{10} = \frac{6}{10}$$

Die Anzahl der vorhandenen weißen und schwarzen Kugeln in der zweiten Urne variiert nun. Die Wahrscheinlichkeit, aus der zweiten Urne eine weiße Kugel zu ziehen ist damit:

$$p(w) = p(ww)\cdot\frac{6}{10} + p(1w+1s)\cdot\frac{5}{10} + p(ss)\cdot\frac{4}{10} = \frac{18}{100} + \frac{30}{100} + \frac{4}{100} = \frac{52}{100} = 0{,}52$$

Baumdiagramm:



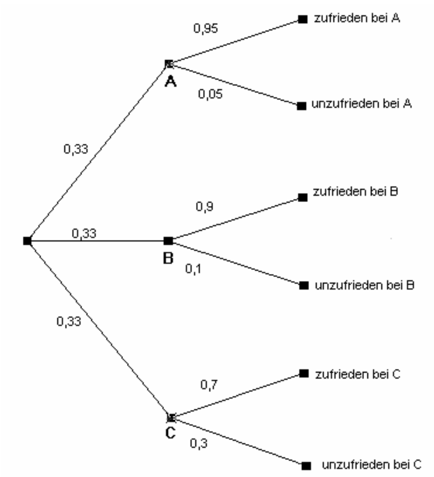

$$p(www) = 0{,}3 \cdot 0{,}6 = 0{,}18$$

$$p(1w + 1s, w) = 0{,}6 \cdot 0{,}5 = 0{,}30$$

$$p(ssw) = 0{,}1 \cdot 0{,}4 = 0{,}04$$

Summe: $p(w) = 0{,}18 + 0{,}30 + 0{,}04 = 0{,}52$

### 3. Pfadregeln / Bedingte Wahrscheinlichkeit




$$p_A(z) = p(A \cap z) = \frac{1}{3} \cdot 0{,}95 = 0{,}317$$

$$p_A(\bar{z}) = p(A \cap \bar{z}) = \frac{1}{3} \cdot 0{,}05 = 0{,}017$$

$$p_B(z) = p(B \cap z) = \frac{1}{3} \cdot 0{,}90 = 0{,}300$$

$$p_B(\bar{z}) = p(B \cap \bar{z}) = \frac{1}{3} \cdot 0{,}10 = 0{,}033$$

$$p_C(z) = p(C \cap z) = \frac{1}{3} \cdot 0{,}70 = 0{,}233$$

$$p_C(\bar{z}) = p(C \cap \bar{z}) = \frac{1}{3} \cdot 0{,}30 = 0{,}100$$

a) Ein Kunde ist mit der Antwort nicht zufrieden:

$$p(\bar{z}) = p_A(\bar{z}) + p_B(\bar{z}) + p_C(\bar{z}) = 0{,}017 + 0{,}033 + 0{,}100 = 0{,}15$$

b) Ein unzufriedener Kunde ist an B geraten:

$$p_{\bar{z}}(B) = \frac{p(B \cap \bar{z})}{p(\bar{z})} = \frac{0{,}033}{0{,}15} = 0{,}22$$

c) Eine zufrieden stellende Antwort wurde von C gegeben:

$$p_z(C) = \frac{p(C \cap z)}{p(z)} = \frac{p(C \cap z)}{1 - p(\bar{z})} = \frac{0{,}233}{0{,}85} = 0{,}274$$

d) Ein Kunde gerät an A und wird zufrieden gestellt (schon im Baumdiagramm ermittelt):

$$p(A \cap z) = 0{,}317$$

### 4. Geometrische Wahrscheinlichkeit

Die drei Bruchstücke seien x , y und (1 – x – y) (da der Stab eine Länge von l = 1m hat und da sich durch das willkürliche zweimalige Brechen nur um eine Abhängigkeit von zwei Größen x und y handelt).
Die Gesamtmenge aller möglichen Ergebnisse unterliegt folgenden Randbedingungen:

$$0 \le x \le 1 \qquad 0 \le y \le 1 \qquad 0 \le (1 - x - y) \le 1 .$$

Aus letzterer folgt

$$y \le 1 - x .$$

Der Flächeninhalt der Gesamtfläche ist damit

$$A_\Omega = 0{,}5 \cdot 1 \cdot 1 = 0{,}5$$

Damit aus den Bruchstücken ein Dreieck gebildet werden kann, müssen die Dreiecksungleichungen erfüllt sein:

$$x + y > (1 - x - y) \quad \Rightarrow \quad y > 0{,}5 - x\,,$$

$$x + (1 - x - y) > y \quad \Rightarrow \quad y < 0{,}5$$

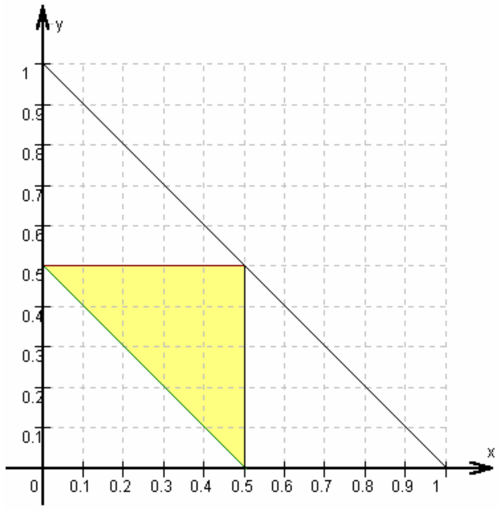
$$y + (1 - x - y) > x \quad \Rightarrow \quad x < 0{,}5\,.$$

Der Flächeninhalt aller günstigen Möglichkeiten ist damit

$$A_\Delta = 0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}125\,.$$

Damit ergibt sich die Wahrscheinlichkeit, aus den drei Bruchstücken ein Dreieck bilden zu können durch

$$p(\Delta) = \frac{A_\Delta}{A_\Omega} = \frac{0{,}125}{0{,}5} = 0{,}25$$




5. **Geometrische Wahrscheinlichkeit**

a) Die Menge aller Ergebnisse unterliegt den Randbedingungen

$$0 \le x \le 1 \qquad 0 \le y \le 1\,.$$

Der Flächeninhalt der Gesamtfläche ist damit

$$A_\Omega = 1 \cdot 1 = 1$$

b) Die beschriebenen Ereignisse müssen folgende Bedingungen erfüllen:

A:

$$x + y < 0{,}5 \quad \Rightarrow \quad y < 0{,}5 - x$$

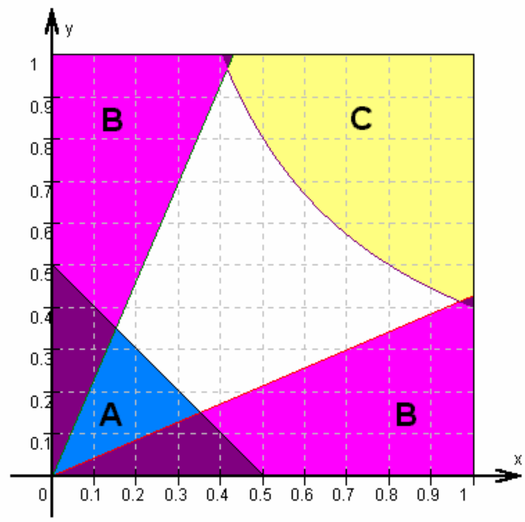
B:

$$\frac{x}{y} \le \frac{3}{7} \quad \Rightarrow \quad y \ge \frac{7}{3}x \qquad \underline{\text{und}}$$

$$\frac{y}{x} \le \frac{3}{7} \quad \Rightarrow \quad y \le \frac{3}{7}x$$

C:

$$x \cdot y > 0{,}4 \quad \Rightarrow \quad y > \frac{0{,}4}{x}$$




c) Die Wahrscheinlichkeiten der beschriebenen Ereignisse errechnen sich nun über die Flächeninhalte:

A:

$$A_A = 0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}125$$

$$p(A) = \frac{A_A}{A_\Omega} = 0{,}125$$

B:

Der die Menge B beschreibende Flächeninhalt setzt sich aus zwei kongruenten Dreiecken zusammen.

$$A_B = 2 \cdot \left(0{,}5 \cdot \frac{3}{7} \cdot 1\right) = \frac{3}{7}$$

$$p(B) = \frac{A_B}{A_\Omega} = \frac{3}{7} \approx 0{,}429$$

$A \cap B$:

Der diese Menge beschreibende Flächeninhalt setzt sich ebenfalls aus zwei kongruenten Dreiecken zusammen, deren Höhe sich aus der Schnittstelle der Geraden

$$y = 0{,}5 - x \quad \text{und} \quad y = \frac{7}{3}x \quad \text{ergibt:}$$

$$0{,}5 - x = \frac{7}{3}x \qquad \Rightarrow \qquad x = 0{,}15$$

$$A_{A \cap B} = 2 \cdot (0{,}5 \cdot 0{,}15 \cdot 0{,}5) = 0{,}075$$

$$p(A \cap B) = \frac{A_{A \cap B}}{A_\Omega} = 0{,}075$$

C:
Der die Menge C beschreibende Flächeninhalt wird mit Hilfe der Integralrechnung ermittelt:

$$A_C = 0{,}6 \cdot 1 - \left| \int_{0,4}^{1} \frac{0{,}4}{x} dx \right| = 0{,}6 - \left| [0{,}4 \cdot \ln x]_{0,4}^{1} \right| = 0{,}6 - \left| (0{,}4 \cdot \ln 1) - (0{,}4 \cdot \ln 0{,}4) \right|$$

$$A_C \approx 0{,}6 - \left| 0 - (-0{,}3665) \right| \approx 0{,}2335$$

$$p(C) = \frac{A_C}{A_\Omega} \approx 0{,}2335$$

**6. Verteilungen**

Einzelmöglichkeiten k = 2 Kugeln aus n = 5 zu ziehen gibt es insgesamt :

$$\frac{n!}{(n-k)!} = \frac{5!}{3!} = 5 \cdot 4 = 20$$

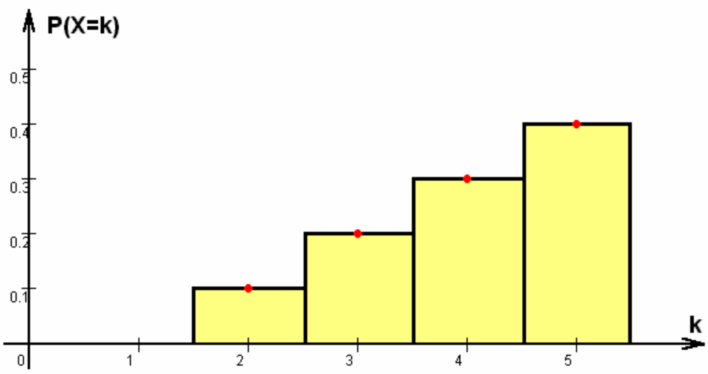
Aus der tabellarischen Darstellung aller Möglichkeiten kann die jeweilige Anzahl abgelesen und damit die dazugehörige Wahrscheinlichkeit errechnet werden.

| | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
|---|---|---|---|---|---|
| **1** | – | 2 | 3 | 4 | 5 |
| **2** | 2 | – | 3 | 4 | 5 |
| **3** | 3 | 3 | – | 4 | 5 |
| **4** | 4 | 4 | 4 | – | 5 |
| **5** | 5 | 5 | 5 | 5 | – |

Damit ergibt sich die Verteilungstabelle für die Zufallsgröße X: Maximum der Augenzahlen :

| **k** | **p( X = k )** |
|---|---|
| 2 | 0,1 |
| 3 | 0,2 |
| 4 | 0,3 |
| 5 | 0,4 |

Histogramm:




Der Erwartungswert der Zufallsgröße X ist

$$E(X) = 2 \cdot 0{,}1 + 3 \cdot 0{,}2 + 4 \cdot 0{,}3 + 5 \cdot 0{,}4 = 0{,}2 + 0{,}6 + 1{,}2 + 2{,}0 = 4$$