Lösungen Klausur 2 MA-1

Aufgabe 1a)

$$f_a(x) = \frac{x}{a} + a + \frac{a}{x-a} = \frac{x^2 + (a^2 - a)\cdot x - a^3 + a^2}{a\cdot(x-a)} \quad ; \quad x \neq a$$

$$f_a{}'(x) = \frac{1}{a} - \frac{a}{(x-a)^2}$$

$$f_a{}''(x) = \frac{2a}{(x-a)^3}$$

Asymptoten: $A(x) = \frac{x}{a} + a$ ist waagerechte Asymptote.

$x_P = a$ ist Polstelle mit Vorzeichenwechsel.

Extrema: $f_a{}'(x_E) = 0 \;\wedge\; f_a{}''(x) \neq 0$

$$0 = \frac{1}{a} - \frac{a}{(x-a)^2} \quad \Rightarrow \quad (x-a)^2 = a^2$$

$$0 = x^2 - 2ax = x\cdot(x-2a) \quad \Rightarrow \quad x_{E1} = 0 \;\wedge\; x_{E2} = 2a$$

$f_a{}''(x_{E1}) = -\frac{2}{a^2} < 0$ für alle a.

$f_a{}''(x_{E2}) = \frac{2}{a^2} > 0$ für alle a.

$H(0 \;;\; a-1)$
$T(2a \;;\; 3+a)$

WP: $f_a{}''(x_E) \neq 0$ für alle $x \in D_f$, da $2a \neq 0$. $\Rightarrow$ Es gibt keine Wendepunkte.

Aufgabe 1b)

Die Ortskurve der Hochpunkte ist wegen $x_{E1} = 0$ die y-Achse.

Die Ortskurve der Tiefpunkte folgt aus $x = 2a$, $a = 0{,}5x$. Eingesetzt in $y = 3 + a$ ergibt $y = \frac{1}{2}x + 3$.