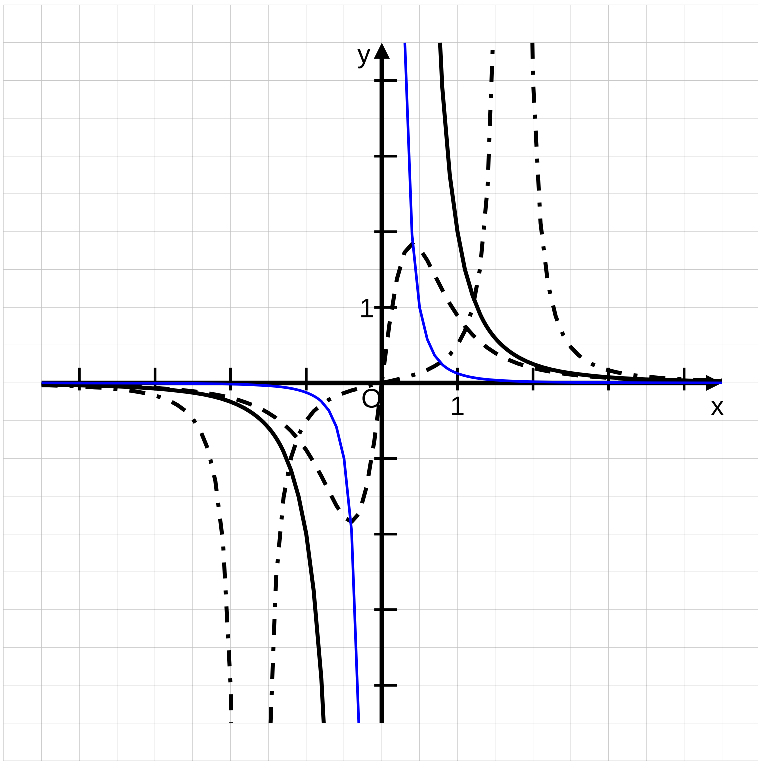
Aufgabe 3) $f_a(x) = \dfrac{2x}{(x^2+a)^2}$



$$f_a{}'(x) = \frac{2\cdot(x^2+a)^2 - 2x\cdot 2\cdot(x^2+a)\cdot 2x}{(x^2+a)^4}$$

$$f_a{}'(x) = \frac{2\cdot(x^2+a) - 2x\cdot 2\cdot 2x}{(x^2+a)^3}$$

$$f_a{}'(x) = \frac{2\cdot(x^2+a) - 2x\cdot 2\cdot 2x}{(x^2+a)^3}$$

$$f_a{}'(x) = \frac{2x^2+2a-8x^2}{(x^2+a)^3}$$

$$f_a{}'(x) = \frac{-6x^2+2a}{(x^2+a)^3}$$

Extrema: $f_a{}'(x_E) = 0 \ \wedge \ f_a{}''(x) \neq 0$

$$0 = -6x^2 + 2a \ \Rightarrow \ x^2 = \frac{1}{3}a \ \Rightarrow \ x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{1}{3}a}$$

$$f_a\left(\pm\sqrt{\frac{1}{3}a}\right) = \pm\frac{\sqrt{27a}}{8a^2}$$

Aufgabe 3a)

(hier ohne Begründungen)

$f_1(x)$: a = 0

$f_2(x)$: a = 0,5

$f_3(x)$: a = – 3

Aufgabe 3b)

Für a = 0 besitzt der Graph eine senkrechte Asymptote bei x = 0; es gibt keine Nullstelle und weder Extrem- noch Wendestellen.

Für a > 0 ist $x_N = 0$ einzige Nullstelle; der Graph ist punktsymmetrisch zum Ursprung und besitzt einen Hoch- und einen Tiefpunkt. Dazwischen liegt bei $x_W = x_N = 0$ der Wendepunkt.

Für a < 0 gibt es zwei senkrechte Asymptoten, eine Null- und eine Wendestelle bei x = 0 und keine Extrema.

Aufgabe 3c)

Der Graph der Funktion $y = \dfrac{1}{8x^3}$ ist die Ortskurve aller Extrempunkte für a > 0. (siehe Bild)

Aus $x_1 = \sqrt{\frac{1}{3}a} \ \Rightarrow \ a = 3x^2$ und $y = \dfrac{\sqrt{27\cdot 3x^2}}{8\cdot 9x^4} = \dfrac{9x}{8\cdot 9x^4} = \dfrac{1}{8x^3}$. (Analog für $x_2 = \sqrt{\frac{1}{3}a}$.)